2024 年全国新课标卷数学创新型试题评析与教学建议

尤　娜[1]，　赵思林[2*]

(1. 重庆师范大学 数学科学学院，　重庆　401331；2. 内江师范学院 教育科学研究院，　四川　内江　641100)

摘　要：2024 年全国新课标数学命题改革做了新的尝试，主要包括调整了试卷结构，突出了试题的创新性和拔尖创新人才的选拔性. 全国新课标卷具有命题立意创新、试题数量减少、试题排序变化、试题区分度高、设问方式新颖等特点. 对 2024 年全国新课标卷数学创新型试题作了统计，对部分创新型试题作了评析. 提出以下教学建议：重视概念教学，把握数学本质；开展问题探究，提升探究能力；掌握创新方法，发展创新素养.

关键词：高考数学；创新型试题；评析；教学建议

DOI：10.13603/j.cnki.51-1621/z.2024.08.002

中图分类号：G633.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-1785(2024)08-0010-05

1　2024 年全国新课标数学创新型试题统计

2024 年全国新课标有新课标Ⅰ、新课标Ⅱ两套数学卷. 此次试题创新命题立意，不仅强调对数学本质的考查，即重点考查数学概念(定义)和基本性质，如新课标Ⅰ卷第 12 题(以下简记为ⅠT12，其他记号仿此)若利用双曲线定义解题则会较简洁，ⅠT14 若用列举法则会减少运算量；突出对逻辑思维的考查，增加证明题的数量，如Ⅰ卷的 T17(2)、T18(2)、T19(2)(3)，Ⅱ卷的 T17(1)、T19(2)(3)等题都需要数学证明. 对 2024 年全国新课标数学卷的创新型试题、考查知识点、分值作了统计(见表 1).

由表 1 可知，从新课标Ⅰ卷、Ⅱ卷的比较看，作为新高考命题改革风向标的新课标Ⅰ卷的创新型试题的数量比新课标Ⅱ卷多，且难度更大；从题型角度看，创新型试题可出现在选择题(含多选题)、填空题、解答题各种题型之中，这说明当下对创新能力的考查具有广泛性；从考查知识点的分布来看，创新型试题易出现在函数、数列、不等式、概率统计、解析几何等高中数学主干知识中，这说明考查创新型试题的知识载体一般是高中数学的主干知识.

表 1　2024 年全国新课标数学创新型试题统计

试卷	试题	题型	考查知识点	分值
新课标Ⅰ卷	8	单选题	函数与不等式	5
	11	多选题	曲线与方程	6
	14	填空题	计数与概率	5
	18	解答题	函数与导数	17
	19	解答题	新定义数列	17
新课标Ⅱ卷	8	单选题	函数与方程	5
	14	填空题	离散最值	5
	18	解答题	概率与决策	17
	19	解答题	解几与数列	17

2　2024 年全国新课标数学卷部分创新型试题评析

2024 年全国新课标高考数学卷Ⅰ、Ⅱ出现了不少优秀的创新型试题. 下面对部分创新型试题从试题背景、试题命制的创新点、考查目的、简略解答等

收稿日期：2024-07-05

基金项目：四川省教育科研资助金项目重点课题(SCJG20A049)；四川省高校人文社会科学重点研究基地四川中小学教师专业发展研究中心科研项目(PDTR2023－14)；四川省哲学社会科学重点研究基地—西华师范大学四川省教育发展研究中心资助项目(CJF23042)

作者简介：尤娜(2001－)，女，四川自贡人，重庆师范大学硕士研究生，研究方向：数学教育

* **通信作者**：赵思林(1962－)，男，四川巴中人，内江师范学院教授，硕士，研究方向：高考数学、数学教育、教师培训

方面作评析.

2.1　问题情境创新

问题情境创新主要指材料背景创新、呈现形式创新、设问方式创新等. 材料背景包括试题涉及的数学知识、问题的背景和各种约束条件；呈现形式包括试题的文字语言、图表语言和数学语言；设问方式包括试题的开放式设问、探究式设问和实践式设问[1].

例 1　（Ⅰ T8）已知函数为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$ 且当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　　）.

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$　　D. $f(20)<10000$

评析　本题以“斐波那契数列 $\{F_n\}$：$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$F_1=1$，$F_2=2$，即数列 $\{F_n\}$：1，2，3，5，8，13，21，…”为背景. 试题命制的创新点在于，题目条件不是直接给出斐波那契数列或函数方程 $f(x)=f(x-1)+f(x-2)$，而是以一个函数不等式 $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$ 给出. 让考生感到新颖别致，且不能按学习过的套路来解题，只能借助学习过的斐波那契数列（教材上有介绍）的“递推”经验和创新思维来解决问题. 本题考查了抽象函数、递推式计算、估算、合情推理、创新思维等数学素养. 由初始条件 $f(1)=1$，$f(2)=2$，反复递推可得 $f(3)>f(2)+f(1)=3$，$f(4)>f(3)+f(2)>5$，…，$f(20)>1\,000$. 故选 B.

例 2　（Ⅱ T8）设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geqslant 0$，则 a^2+b^2 的最小值为（　　）.

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

评析　本题以超越函数 $(x+a)\ln(x+b)$、不等式恒成立与双参数问题为背景. 试题命制的创新点在于，一个一次函数与一个超越函数的乘积 $(x+a)\ln(x+b)$ 中含 2 个参数. 这类含双参数的超越函数问题给考生思维增加了较大难度，让不少考生因题难而生畏甚至放弃解答，从而充分体现了该题的压轴作用和选拔功能. 本题考查复合函数的定义域、零点、导数、单调性、最值，基本不等式的应用等基础知识；考查化归与转化、数形结合、分类讨论、消元法、配方法等数学思想方法；考查学生思维的灵活性、敏捷性和创新性等思维品质. 题目条件 $f(x)\geqslant 0$ 可等价转化为不等式 $(x+a)\ln(x+b)\geqslant 0$ 恒成立. 若把此不等式左边的函数拆分成两个单调递增函数即 $(x+a)$ 和 $\ln(x+b)$，就不难从函数符号变化入手思考问题并有结论：当且仅当它们的两个零点 $x=-a$ 和 $x=1-b$ 重合时，才满足该不等式恒成立. 从而有 $-a=1-b$，因此 $a^2+b^2=2b^2-2b+1$，故当 $b=\dfrac{1}{2}$ 时取最小值. 本题若从 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，通过求函数 $f(x)$ 的最小值来找到关系 $b=1+a$，则其思维量和运算量都非常大.

例 3　（Ⅰ T14）甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8. 两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上的数字大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用），则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为________.

评析　本题以游戏比赛中的“卡片数字”为背景，以有限制条件的组合计数和古典概率设计问题. 试题命制的创新点在于，问题的情境很熟悉，但常规解题套路用不上. 即考生容易下意识考虑用排列数、组合数的综合算式来分析和计量卡片配对的种数，但因问题的情况比较复杂导致考生在短时间内列不出综合算式，加之本题位于填空压轴题位置，由此考生容易产生畏难情绪甚至放弃. 本题的精妙之处在于，若用分类枚举法或画树图法（这是组合计数最基本的方法），则并不复杂. 本题考查组合计数和古典概率的计算；考查分析问题、解决问题及预估和评价等高级认知能力. 解答本题需要考生对列算式法、分类枚举法或画树图法等做出正确的预估和评价，预估和评价属于高级认知能力. 通过分类枚举法和正难则反的思想，可解得 $P=1-\dfrac{1}{24}-\dfrac{11}{24}=\dfrac{1}{2}$.

2.2　知识交汇创新

知识交汇创新指在知识网络的交汇处设计新颖问题，以数学各部分内容之间的有机联系为考查点，突出知识结构和具体知识点之间的有机联系，创新试题考查的知识内容.

例 4　（Ⅰ T11）造型可以做成美丽的丝带，可以看作图 1 中的曲线 C 的一部分，已知 C 过坐标原点 O，且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a\ (a<0)$ 的距离之积为 4，则（　　）.

A. $a=-2$

B. 点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

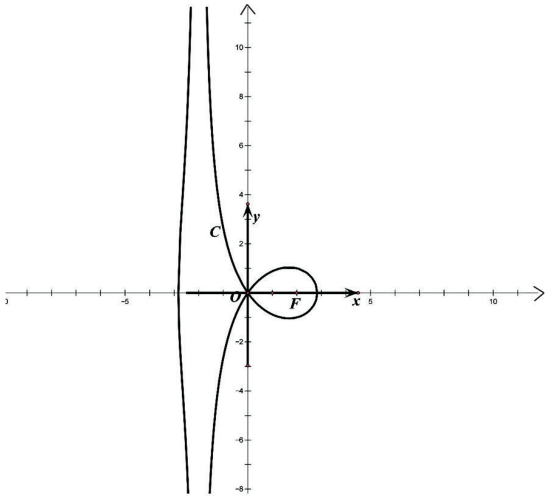

图 1

D. 当点 (x_0,y_0) 在 C 上时，$y_0\leqslant\dfrac{4}{x_0+2}$

评析　本题以“美丽的丝带”为情境，以考生从未学习过的一个二元四次曲线为背景，以解析几何中的基本量(如距离、坐标等)为载体设计试题. 试题命制的创新点在于，比较自然地引出了学生没有学习过的新曲线，其方程为 $y^2=\left(\dfrac{4}{x+2}\right)^2-(x-2)^2$，考生从未学过和见过，是一个全新的曲线；题干及四个选择项涉及曲线与方程、最值、不等式、导数等多个知识和数学方法，是一道考查多种关键能力和创新思维素养的好题目.

根据已知条件距离之积为 4，得出 $a=-2$，故 A 正确. 如图 1，再设曲线 C 上任一点坐标为 (x,y)，根据条件列出等式 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}\cdot(x+2)=4$，代入点 $(2\sqrt{2},0)$，满足等式，则点 $(2\sqrt{2},0)$ 在曲线 C 上，故 B 正确. 曲线方程简化可得 $y^2=\left(\dfrac{4}{x+2}\right)^2-(x-2)^2$，令 $f(x)=y^2$，再对 $f(x)$ 求导数并利用单调性可证明 $f(x)>1$，故其纵坐标的最大值大于 1，故 C 错误. 由于 $y_0{}^2=\left(\dfrac{4}{x_0+2}\right)^2-(x_0-2)^2\leqslant\left(\dfrac{4}{x_0+2}\right)^2$，所以 $y_0\leqslant\dfrac{4}{x_0+2}$，故 D 正确. 因此选 ABD.

例 5　(ⅡT19)已知双曲线 C:$x^2-y^2=m\ (m>0)$，点 $P_1(5,4)$ 在 C 上，k 为常数，$0<k<1$，按照如下公式 P_{n-1} 依次构造点 $P_n(n=2,3,\cdots)$：过点 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支点交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 (x_n,y_n).

(1)若 $k=\dfrac{1}{2}$，求 x_2、y_2；

(2)证明：数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

(3)记 S_n 为 $\Delta P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对于任意正整数 n，$S_n=S_{n+1}$.

评析　本题以双曲线为背景构造递推数列 $\{x_n-y_n\}$，探究数列 $\{x_n-y_n\}$ 的性质及其应用. 试题命制的创新点在于，以双曲线上的点 $P_1(5,4)$ 为初始点，按照一定规则构造点列 (x_n,y_n) ($n=1,2,\cdots,k,\cdots$)，由此产生递推数列 $\{x_n-y_n\}$ ($n=1,2,\cdots,k,\cdots$)，然后探索并寻找数列 $\{x_n-y_n\}$ 的递推关系，接着用数列知识研究递推数列 $\{x_n-y_n\}$ 的一些性质，在此基础上去解决其他的问题. 这其实就是一个比较完整的数学探究过程，即特殊结论→探索一般性质→证明一般性质→一般性质的应用. 本题考查直线的斜率、双曲线、对称点、等比数列等基础知识；考查数学探究能力和创新能力. 另据调查，一些老师对本题第(2)(3)问在规定时间内难以完成，这充分说明本题的创新性和高难度，能起到选拔拔尖创新人才的作用. 第(1)问直接写出直线 P_1Q_1 的方程，与曲线 C 方程联立解出 Q_1 的坐标，再由对称性求出 P_2 的坐标即可. 第(2)问根据等比数列的定义进行证明即可，思路多样：一是联立过 P_n 且斜率为 k 的直线方程与双曲线方程，利用韦达定理求得 Q_n、P_n 坐标；二是将点 P_n、P_{n+1} 代入双曲线方程中，两式相减即可获证；三是利用比例的性质(等比定理)获证. 第(3)问既可以利用三角形面积公式，证明 S_n 的值是与 n 无关的定值，又可将问题证明面积相等转化为证明两直线平行.

2.3　数学定义创新

数学定义创新指试题中涉及中学数学教材中未出现过的新概念、新性质、新运算、新公式、新定理等，具有情境的新颖性、设问的灵活性、思想的深刻性、突出的选拔性等特点.

例 6　(ⅠT19)设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j\ (i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)- 可分数列.

(1)写出所有的 (i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant6$，使数列 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 是 (i,j)- 可分数列；

(2)当 $m\geqslant3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是

$(2,13)$－可分数列；

(3)从 $1,2,\cdots,4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j $(i<j)$，记数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)-可分数列的概率为 p_m，证明：$p_m>\frac{1}{8}$.

评析　研究一个数列的子数列的性质是大学《高等数学》中的一个课题，类似于“(i,j)-可分数列”新定义(概念)的研究方法在《近世代数》中很常见，因此本题含有高等数学背景. 试题命制的创新点在于，本题以等差数列为载体，给出了“(i,j)-可分数列”的新定义(概念). 这个问题情境非常新颖，考生既能感到等差数列的熟(悉)，又能感到“(i,j)-可分数列”的新(颖). 考生不需要提前学习高等数学知识就能解决本题，但即使大量刷题也难以或无法完全解决本题. 据了解，一些竞赛教练在规定时间内对第(3)问也感到困难. 三个小问的设计有创意：第(1)问在于感知“(i,j)-可分数列”的存在性以获得感性认识，第(2)问在于做初步探究并获得一些特殊经验(为第(3)问做铺垫)，第(3)问在于对第(2)的结论一般化并发现一般规律. 本题考查等差数列、分类计数、古典概型的计算等基础知识；考查分析、探究和解决问题能力；考查自主学习能力、知识迁移能力、探索创新能力. 解答本题需要对这个新定义(概念)进行理解、内化、应用、迁移、探索规律、创新等高阶认知活动，意在考查学生数学创新思维能力和数学创新素养，是一道选拔拔尖创新人才的好题. 第(1)问让学生枚举简单情况所有可能的 (i,j) 对为 $(1,2),(5,6),(1,6)$；第(2)问让学生证明 $(2,13)$-可分数列，提示学生可以通过公差大于 d 的等差数列来跳过删去的数字；第(3)问表面是一个概率的创新型问题，要证明 (i,j)-可分数列的概率，但与数列以及概念的关系不大，实际要计算有多少个不同的 (i,j) 使得原数列可分；通过第(1)问和第(2)问简单情况给予学生启发，试图引导学生从特殊到一般寻找规律，发现 (i,j) 的两种一般情况为可分数列，即 $(4n+1,4k+2)$ 和 $(4n+2,4k+1)$ 两种 (i,j) 情况.

3　教学建议

针对 2024 年全国新课标数学创新型试题的特点，有以下教学建议.

3.1　重视概念教学，把握数学本质

数学概念是人类智慧的结晶[2]. 数学概念是数学家研究某类问题通过高度抽象和概括的结果，是建构数学知识体系的基石. 数学知识主要包括数学概念、数学命题(含定理、公式、性质、推论等)和数学思想方法，而数学命题和数学思想方法内蕴于数学概念之中. 李邦河[2]认为“数学玩的是概念，而不是纯粹的技巧”，李院士还认为，不重视概念是舍本逐末的做法. 由此可认为，数学知识的本质是数学概念(定义). 因此，指向数学本质的教学是基于数学概念(定义)及概念应用的教学. 从数学知识的生长和教材的编写顺序(体例)来看，一般按照情境—问题—概念(定义)—命题(公式、定理、性质等)，接着是知识(含概念或定义、命题)应用—练习的顺序逐步展开. 因此，教学应按照知识生长的顺序来展开教学，即情境—问题化，问题—概念化，概念—命题化，知识—应用化，应用—经验化[3]. 2024 年全国新课标数学卷重视对数学本质(数学概念或定义)的考查，如Ⅰ T19 若不用“(i,j)-可分数列”的定义，则此题无法求解.

3.2　开展问题探究，提升探究能力

探究内蕴创新，创新源于探究. 问题既是数学探究的“心脏”，又是培养学生数学探究能力的载体. 开展问题探究教学应以数学问题为探究的切入点，主要包括层次性问题、开放性问题、综合性问题、现实性问题等. 一是以层次性问题深化思维. 如Ⅰ T19 中三个小问层层递进，以新定义激活数学思维，以第(1)问明确定义的对象的存在性，以第(2)问类比探究问题，以第(3)问验证第(1)(2)问的推广性结论，让学生的数学思维逐步深化. 二是以开放性问题(如条件可变性问题、方法多样性问题、结论开放性问题等)锤炼探究能力. 三是通过对综合性问题的探究使不同的知识系统化. 如Ⅱ T11 以函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$ 为主干，并以选项设置子问题(即函数的零点问题、极值问题、对称问题)，可使函数相关性质(即对称性、单调性)等碎片知识形成结构化知识. 问题探究教学应以数学探究方法(包括类比式探究、归纳式探究、演绎式探究、情境式探究、统计式探究等)为教学重点，以解决学生缺乏的探究之“渔”. 如，Ⅰ T8 以斐波那契数列类比探究函数方程 $f(x)=f(x-1)+f(x-2)$，问题就容易获解；Ⅰ T19 以第(1)(2)问为特例，采用归纳探究获得一般性结论，即可解决第(3)问；Ⅰ T14 以游戏比赛“卡片数字”为情境，可探究出卡片配对的种数. 开展问题探究教学后，教师应引导学生总结数学探究活动的经验，让学生能够整合碎片经验，反省片面经验，创造鲜活经

验，升华价值经验等[4]，从而提高数学探究能力.

3.3　掌握创新方法，发展创新素养

大力培养和发展学生的数学创新素养是新时代党和国家对数学教育提出的新要求，应认真落实在"教""学""考""评"等各个环节. 数学创新素养的培养离不开数学创新方法. 教师应结合典型案例，介绍一些数学创新方法，如经验重组法、合情推理法、直觉猜想法、实验观察法、创造想象法、审美顿悟法[5]、反思批判法[6]等. 针对 2024 年Ⅰ卷、Ⅱ卷的创新型试题的教学，可采用以下方法. 一是经验重组法. 如ⅠT18(2)的解答可借助函数模型 $\log_a \frac{1+x}{1-x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）(1993 年全国高考理科 24 题)或熟知的函数 $\ln \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性(对称中心)的经验，对函数 $\ln \frac{x}{2-x}$ 的图像通过平移变换找到其对称中心即 $(1,0)$，并对函数 $(x-1)^3$ 的图像通过平移变换找到其对称中心即 $(1,0)$，第(2)问就迎刃而解了. 二是合情推理法. 如ⅠT19(3)问 (i,j) 的两种划分情况，需要通过第(2)问的一般化推广而得到. 三是直觉猜想法. 如ⅡT8 运用直觉思维将它分解成 2 个比较简单的函数，从而弱化含双参数函数的抽象性. 四是实验观察法. 如ⅡT19 通过绘制图像，能够更加直观地看出 P_n 与 Q_n 的联系. 五是审美顿悟法，即通过运用数学美的思想. 如用定义的简单美、公式的对称美等，实现创新性地解题. 六是反思批判法，即运用批判性思维审视解题过程，不断反思、分析、评估解题思路及优劣状况，得到最优化或创造性解题方法[6]. 如ⅠT16(2)、ⅡT19 等题都有多种解题思路，可择优而取. 还应注意，发展创新素养需要学生对创新要素(包括身体、心理、创新心力、创新心智等)进行有效的自组织[7].

参考文献：

[1] 陈昂，任子朝. 高考数学试题情境创新研究 [J]. 中学数学教学参考，2016(13)：2-4.

[2] 李邦河. 数的概念的发展 [J]. 数学通报，2009，48(8)：1-3.

[3] 熊露，赵思林. 积累数学活动经验的"四化"路径 [J]. 教学与管理，2020(24)：92-94.

[4] 熊露，赵思林. 数学活动经验素养化的路径及教学策略 [J]. 内江师范学院学报，2023，38(6)：1-4.

[5] 李红霞，尤娜，赵思林. 数学创新思维能力的培养策略 [J]. 数学通报，2022，61(9)：17-20.

[6] 尤娜，赵思林. 批判性思维的心理过程及对数学教学的启示 [J]. 内江师范学院学报，2023，38(10)：1-6.

[7] 赵思林，高峥，熊露. 数学核心素养的内涵探究 [J]. 内江师范学院学报，2020，35(6)：12-17.

An analysis of mathematics innovative test questions design and teaching suggestions for in the 2024 college entrance examination of the national new curriculum

YOU Na[1]，ZHAO Silin[2*]

(1. School of Mathematical Sciences，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China；

2. Institute of Educational Science，Neijiang Normal University，Neijiang，Sichuan 641100，China)

Abstract：New attempts were made in the design of 2024 national college entrance examination for mathematics，which includes the adjustment of the structure of the test paper，the highlighting on the innovative nature of the test questions and the selective function of the test questions for finding top innovative talents. The 2024 national college entrance mathematics examination(edition of national new curriculum) is characterized by innovative design，the reduction in the number of examination questions，the change in the order of examination questions layout，a higher degree of selectivity for the examination questions and the originality of test questions. A counting is made of the innovative types of questions and an analysis is made on some types of the innovative questions. The following teaching suggestions are put forward：attention being directed to concept teaching for the graspery of the essence of mathematics；the implementation of problem exploration to cultivate explorative ability；the learning of innovative methods to develop innovative literacy.

Keywords：college entrance mathematics examination；innovative types of test questions；anaylsis；teaching suggestions

（责任编辑：吕晓亚）