# 数学归纳法的文化性、重要性与教学可行性

纪定春， 赵思林*

（内江师范学院 数学与信息科学学院， 四川 内江 641100）

**摘 要**：数学归纳法是一种基本的数学证明方法，主要用于证明与自然数有关的一些数学命题，它是沟通特殊到一般、有限到无限的桥梁. 通过对数学归纳法的历史文化性、重要性与突破教学难点的可行性的分析后建议：在修订高中数学课标时应将数学归纳法纳入必修内容.

**关键词**：数学归纳法；文化性；重要性；可行性

**DOI**：10.13603/j.cnki.51－1621/z.2019.04.005

**中图分类号**：G633.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1671－1785(2019)04－0021－06

## 0 引言

近年来，高中数学课程对数学归纳法的教学要求和考试要求有不小变化. 2003 年新课改前是必修内容；2003～2017 年变为选修内容，实际上很多高中是不学不修；2017 年版的高中数学课程标准把数学归纳法打上了“ * ”，即不作为高考考试的内容，相当于数学归纳法退出了高考，据已往经验，数学归纳法一般会退出高中课堂，很多高中教师可能不再教数学归纳法了，这对高中数学教学和高等数学教学必然会造成消极影响，由此引发了不少数学教师的担忧. 因此，本文对数学归纳法的历史文化性、重要性以及在高中教学的可行性进行分析，认为在修订高中数学课标时应将数学归纳法纳入必修内容.

## 1 数学归纳法的历史文化性

数学归纳法具有深厚的历史文化底蕴，是数学历史育人、数学文化育人的好素材. 下面对数学归纳法的起源、发展、成熟作了简述.

### 1.1 数学归纳法的起源

数学归纳法的形成，经历了漫长的时间. 归纳递推思想可追溯到公元前六世纪毕达哥拉斯时代甚至更早，最好的例证是关于毕达哥拉斯对点子数的命题证明，通过有限个特殊的对象归纳得出的一般结论[1]. 所谓的毕达哥拉斯点子数命题，即连续 $n$ 个正奇数之和等于这些数的个数 $n$ 的平方，即为：$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$. 这显然不是完全意义上的数学归纳法，而是一种不完全归纳法，得到的结论仅是一种猜想，不具可靠性. 但这种论证方式对数学归纳法的发展起到思想启蒙作用.

归纳推理思想进一步发展阶段是古希腊欧几里得时期，对“素数的个数是无穷多个”的证明，该证明需要用到结论：“若存在 $n$ 个素数，则必存在 $n+1$ 个素数”，这种方法就是通过有限实现无限，体现了数学归纳递推思想[2]. 这可能是最早用有限证明无限的例子[2]. 冯进[3]认为，欧几里得完成了数学归纳法证明的关键一步. 虽然欧几里得的证明过程中体现了归纳递推思想，但要真正形成现代意义上数学归纳法中归纳奠基、归纳递推和归纳论断的步骤却不

**收稿日期**：2019-03-04

**基金项目**：四川省“西部卓越中学数学教师协同培养计划”项目(ZY16001)；四川省高校人文社科研究基地四川中小学教师专业发展研究中心科研项目——中学数学教师核心素养结构与测评研究(PDTR2018-02)；内江师范学院精品资源共享课《初等代数研究》(内师院发〔2013〕53 号)

**作者简介**：纪定春(1995—)，男，四川资阳人，内江师范学院本科学生，研究方向：数学教学

* **通讯作者**：赵思林(1962—)，男，四川巴中人，内江师范学院教授，硕士，硕士生导师，研究方向：高考数学、数学教育

易,作为一种严密的数学方法进行论证是近代的事.

### 1.2　数学归纳法的发展

张映姜[2]研究表明,早在 11 世纪归纳法已普遍使用,伊斯兰数学家凯拉吉使用了归纳法,这可能是数学归纳法的最早证明方法,采用数学归纳法的两个步骤证明“ 1, 2, … , $n$ 的立方和等于它们和的平方”这个命题,这两个步骤分别是:第一,验证了第一项成立,即现在的数学归纳法中的奠基;第二,利用反向递推的思想,属于反向归纳法,不属于数学归纳法,但“因为他做的是反向推理,但无论如何凯拉吉的推理是现存的对整数立方和公式的最早证明,使用了明显的归纳推理,还将推理建立于最基础的情形[3]”.这表明,伊斯兰数学家将数学归纳法的发展向前推进了一步,初步形成了数学归纳法奠基和归纳递推的雏形.张映姜[2]、冯进等[3]研究表明,13 世纪末法国数学家莱维・本・热尔松在《计算技术》一书中证明排列组合和有关整数命题时,用了“逐步的无限递推”的递推归纳思想,这也是最早认识数学归纳法证明过程两个基本步骤的数学家,更加清晰的体现数学归纳法中的奠基和递推这个两个步骤.莱维・本・热尔松的这些工作,对数学归纳法走向成熟奠定了基础,数学归纳法的“奠基”和“递推”是数学归纳法的核心,标志着数学归纳法的核心内容趋于成熟.

文艺复兴推动下,数学归纳法再次得到发展.意大利数学家毛罗利科斯(Franciscus Maurolycus,1494～1575),用过与数学归纳法相似的方法论证,但没给出数学归纳法这个名字.毛罗利科斯在对全体自然数有关命题的证明进行研究后,认为需要考察起始命题,即数学归纳法的归纳奠基.毛罗利科斯认定递归推理是个好方法,所谓递归推理是指这样的一种思想方法,它首先确定命题对于第一个自然数是真的,然后再去证明命题具有递推性质,即如果这个命题对于某一个自然数是真的, 那么作为一个逻辑必然,它对于该数的后继数也是真的[1].在1575 年所著《算术》一书中指明归纳推理这种思想.说明数学归纳法的研究对象是自然数有关的命题,此前还没人研究数学归纳法要解决问题的对象问题,验证命题的第一个自然数是真命题.证明命题具有递推性质,最后将结果作为一种逻辑必然,其实是数学归纳法中的第三步,作出结论.

毛罗利科斯所提出的递归推理思想,通过法国数学家、物理学帕斯卡(B. Pasca1)而得到提炼和发扬,出现在帕斯卡所著《论算术三角形》一书中.王科[4]研究表明,帕斯卡运用了现代意义上数学归纳法证明的两个核心步骤证明帕斯卡三角,意味着数学归纳法证明的确立.孙宏安等[5]研究表明,数学归纳法最先明确而清晰的被阐述并使用是帕斯卡,他在 1645 年所著《论算术三角形》中使用数学归纳法证明“帕斯卡三角形”,即二项式展开式系数表.帕斯卡最大的贡献在于最先明确而清晰的将数学归纳法的归纳奠基和归纳推理两步指出来,即:第一步,验证 $P(1)$ 为真;第二步,假设 $P(k)$ 为真,证明 $P(k+1)$ 为真.并用该法证明组合数公式 $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$ ,这是第一个明确而清晰用数学归纳法证明的数学命题,但帕斯卡的证明过程没有归纳论断,即没有当第一步和第二步都成立时,则 $P(n)$ 对所有的自然数都成立.严格上来说,帕斯卡是对毛罗利科斯工作的总结、提炼和发展.帕斯卡的工作,使得数学归纳法更加清晰,但这不是完全意义上的数学归纳法.

数学归纳法名字的发展和形成经历了很长时间.平辛伦[1],张映姜[2],张莉等[6]对数学归纳法名字的由来作了研究,数学归纳法在 19 世纪又叫“逐次归纳法”和“完全归纳法”,这两种叫法最早出现在英国数学家德・摩根于 1838 年所著《小百科全书》(Penny Cydopedia)引言中,并建议使用“逐次归纳法”.德・摩根在他的条目“归纳法(数学)”中建议用“逐次归纳法(Succesive induction)”,但最后他使用了数学归纳法这个术语,被认为是最早使用数学归纳法这一术语的数学家.英国数学家托德亨特(I・Todhunter.1820～1884)所著《代数》(1866 版)一书中,采用了数学归纳法这一术语并得到广泛传播.托德亨特所使用的“数学归纳法”在当时不能广泛地被人们接受,此时“数学归纳法”的名字处于争论时期,未完全得到公认.

19 世纪 90 年代中期,德国数学家戴德金又将此方法称为“完全归纳法”,并在德国流传甚广.该提法与当时逻辑学上完全归纳法的定义不一致,导致“完全归纳法”与数学归纳法不等价.虽然数学归纳法和一般归纳法相似,但它们之间有本质区别.“一般归纳法是通过考察一部分对象,然后从这些对象出发,推出一般性结论的方法.”需要指出的是完全归纳法和不完全归纳法都属于归纳法,完全归纳法只是归纳法的一种,完全归纳法要考察所要研究的所有对象,故通过归纳法得出的结论不一定可靠.例如 $f(n)=n^2-n+41$,对于所有正整数 $n$ ,其函数值

都是质数吗？通过对前面一些正整数（$n \leqslant 40$）的验证，发现都是质数，那么就可以肯定的断定后续函数值一定是质数吗？当然不行的．事实上，当 $n=41$ 时，$f(n)=n^2-n+41$ 的函数值是合数．通过归纳法只能给出部分研究对象的一般性结论（猜想），具有不严谨性，而不能作为严格的数学证明方法．

数学归纳法是严格的论证方法，是由演绎逻辑发展而来，是一种新的表现形式．首先，证明 $P(1)$ 真，这步是基础，如果 $P(1)$ 不真，那后面推演都没有基础和根据；其次假设 $P(k)$ 真，证明 $P(k+1)$ 真，这个步骤实质上包含无穷多个三段论，上一个命题是真为前提，推下一个命题为真，这样一直往下演绎推理，从而实现从有限到无限的证明．

### 1.3　数学归纳法的成熟

意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano，1858～1932）的自然数第五公设（即第五个公理）的建立标志着数学归纳法走向成熟．1889 年皮亚诺发表《算术原理新方法》，他定义了“集合”“后继数”“属于”等，建立了自然数五条公设[1]：(1)1 是自然数；(2)1 不是任何自然数的后继数；(3)每一个自然数 $a$ 都有一个后继数；(4)若 $a$ 和 $b$ 有相同的后继数，那么 $a=b$；(5)（归纳公理）若一个由自然数组成的集合 $S$ 若果含有 1，又若当 $S$ 中含有数 $a$ 时，它一定含有数 $a$ 的后继数，那么集合 $S$ 和自然数集相等．其中第五公设（又称归纳公理），为数学归纳法奠定了理论基础，彻底解决了数学归纳法的理论基础，这标志着数学归纳法的成熟．可见数学归纳法是皮亚诺归纳公理的特例．很多研究者对数学归纳法进行了论证和推广，如朱孝璋[7]从自然数的最小数原理出发，用集合的观点导出了常见的数学归纳法．胡大志等[8]用集合的观点给出对古典数学归纳法的一种严格证明，并对数学归纳法的基本形式加以推广，从而使数学归纳法扩大了应用范围．归纳公理和最小数原理是等价的，张盛虞[9]给出了最小数原理和归纳公理等价的证明方法，推出了数学归纳法常见类型并进行了推广．

## 2　数学归纳法的重要性

### 2.1　数学家对数学归纳法的重视

近代以来，数学家对数学归纳法非常重视．如著名数学家华罗庚[10]认为：“数学归纳法这个方法很重要，对学好高等数学有帮助，对认识数学的性质也有裨益，同时可以帮助我们深思．”数学家对数学归纳法的重要性有深刻的体会，数学教育工作者也应该认真反思并认同数学归纳法的重要性．数学归纳法是数学家在探索“用有限解决无限”的漫长过程所创造出来的数学智慧，是高层次的概括和提炼所产生出的普适性方法，具有思想价值和方法论价值．正如著名的数学家米山国臧[11]所说：“纵然把数学知识忘记了，但数学的精神、思想、方法也会深深地铭刻在头脑里．”数学知识是具体化的数学思想，数学思想方法是凝结在具体数学知识中的精华部分，掌握了数学的精神、方法和思想也就统领了数学知识．所以应当听听数学大师的建议，重视数学归纳法．

### 2.2　数学归纳法具有方法论的价值

数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等一般法则的一门学问[12]．简单来讲，方法论就是具有普遍意义的方法，是解决数学问题、发现和证明一些数学命题的常用方法．数学归纳法具有方法论的价值，它象一只“会下蛋的鸡”，具有知识创生的功能即知识生长的能力．数学归纳法是一种全息方法，能够衍生出一系列的知识点[13]．第一数学归纳法可以演化生长出一系列的归纳法，如第二数学归纳法[14]；累积数学归纳法[15]；倒推（反向）数学归纳法[16-17]；跳跃式数学归纳法[18]；跷跷板数学归纳法[2]（也称螺旋式数学归纳法）；超穷归纳法、连续归纳法、二元归纳法等[3]，数学归纳法仅仅是超穷归纳法的一个特例；二元有限归纳法及推广[14]；推广到连续区间上的数学归纳法，对等距归纳和非等距归纳这一问题的提出具有较大意义[19]．数学归纳法具有发现、推广和证明数学命题的功能．数学归纳法能培养学生发现问题、推广问题、解决问题的能力，如由二元均值不等式到三元均值不等式的推广，最后推广到 $n$ 元均值不等式，可以用数学归纳法证明 $n$ 元均值不等式．许多问题推广到 $n$ 元情形得到猜想之后，再用数学归纳法去证明，其解题思路自然流畅，其证明过程也比较简洁．

### 2.3　数学归纳法的应用价值

数学归纳法具有广泛的应用，特别是在高等数学中，数学归纳法是学习高等数学重要的、必要的数学方法．以《高等代数（第四版）》（北大数学系前代数小组编）为例，该书使用数学归纳法证明定理高达 14 次、例题（不含课后习题）4 次，而且有些定理的证明必须要用到数学归纳法，这在一定程度上说明数学归纳法在高等数学中具有不可替代性，这足见数

学归纳法在高等数学中的广泛应用和重要性. 数学归纳法在中学数学中也有广泛的应用,如在证明恒等式、整除性、数列通项公式、不等式、几何、竞赛中都有广泛的应用. 数学归纳法是通过有限来证明无限的思维工具,将无穷多个三段论概括为一个三段论来证明关于自然数的命题,是人类理性智慧的光辉范例. 特别是推广后的数学归纳法,应用范围更广泛,解决问题的类型更多.

## 3 数学归纳法的教学可行性

### 3.1 数学归纳法的教学难点分析

常见的数学归纳法的教学困难主要有如下几点:第一,学生不理解归纳奠基的重要性,做题时常忽略;第二,不理解为何要假设命题 $P(k)$ 为真,对假设命题 $P(k)$ 为真抱有怀疑态度;第三,不理解假设命题 $P(k)$ 为真,为何证明了命题 $P(k+1)$ 为真,就能推导出对所有的命题都成立. 实际上,归纳奠基是数学归纳法推理的基石(基础),是一切证明的前提条件. 由命题 $P(k)$ 为真推导命题 $P(k+1)$ 为真,是为了说明命题具有传递性(递推性). 用人工智能的观点来看,数学归纳法的第二步(即归纳递推)实质上具有"自动推理功能(能力)",它把无穷多个三段论放在了一个三段论中. 近年来对数学归纳法的应用研究和教学研究比较多,如赵春祥[20]对数学归纳法的难点做了分析,给出了证明不等式从 $P(k)$ 到 $P(k+1)$ 的策略与方法,如等价转化命题、强化命题结论和寻找过度条件等策略. 还可仿照文献[21]对数学归纳法的教学难点作心理分析. 詹欣豪和何小亚[22]分析了数学归纳法的教学困难并给出了教学对策. 这些研究给数学归纳法的教学和应用提供了新的视角,运用现代教育理论对数学归纳法的教学设计,对数学归纳法的教学具有启发性和指导性. 数学归纳法在高中教学的困难还体现在高中不讲"数学归纳法是皮亚诺第五条公理的具体应用",也不给出数学归纳法的严格证明,这就让很多学生对数学归纳法感到"不放心". 此外,数学归纳法不是一个简单的三段论,而是一个无穷的"复合式"三段论,这对高中学生来说,没有现成的数学经验可以借鉴,来帮助和支持对数学归纳法的同化学习.

### 3.2 突破数学归纳法教学难点的可行性

数学归纳法是高中数学公认的教学难点,吸引了很多教师的思考与研究,取得了不少研究成果(结果). 如陈雪梅等[23]利用心理学理论,设计了数学归纳法的教学过程,并对设计的意图进行了分析,通过创设情境激发学生的内在动机和认知欲望,让学生将外在知识内化为自身对知识的理解和认识,通过有效的表征促进学生对数学归纳法本质的认识. 王科和汪晓勤[24]从介绍数学归纳法的发展历史出发,在教学过程中让学生经历文字书写阶段、缩写代数化阶段、符号代数阶段、形式化阶段等,这些阶段其实质是让学生经历数学化(即符号化和抽象化)的过程,这有利于学生建构对数学归纳法概念的理解和认识,从学习的角度出发设计数学归纳进行的教学,通过逐步(级)抽象的过程,层层拔高数学抽象程度,数学教学应体现从简单到复杂、从具体到抽象的教学原则. 胡群[25],马茂年等[26]提倡课堂回归"数学化",让数学课堂成为真正的思维训练场,强调数学归纳法在中学应该被得到重视,数学归纳法具有深厚的数学思想,应该让学生从知识角度学习数学归纳法的精髓,而不是走形式化的教学. 胡群[25]的教学设计采用类比法,注重生活中的游戏和已有知识经验(沈顺良[27]的教学改进中也体现),由多米诺骨牌到数列,再到数学归纳法,过渡自然恰当. 这个教学设计,其教学程序按照"游戏"→"数列"→"数学归纳法"→"案例"→"总结方法"进行,其中的"游戏""数列"起先行组织者的作用,起到了激发动机和激活经验的作用. 李璜[28]认为,当下以解题教学代替概念教学存在诸多弊端,并用概念教学的 APOS 理论(即活动—程序—对象—图式)对数学归纳法进行教学设计,解决了教学弊端. 张松年[29]运用数学概念的表征理论(即对数学概念的感知、加工、存储、记忆等过程),以生活中的事例引入新课,丰富学生的感性认识,再逐步渗透数学归纳法的概念,然后形成数学归纳法的完整概念,最后通过应用和巩固对数学归纳法的操作步骤,强调学生对数学概念的表征. 对数学概念的准确表征是理解数学本质的需要,是认识数学特点的需要,是解决数学问题的需要,是学生理解数学概念的重要标志. 潘伊人和濮安山[30]从数学核心素养的视角出发,认为以数学归纳的教学设计和反思出发,认为数学归纳法是培养学生观察问题、思考问题和解决问题的数学方法;王跃辉等[31]也要求培养学生数学思考能力、问题解决能力和创新意识. 学生学习数学归纳法应该"观察"数学归纳法所要解决问题的特点:证明与自然数有关的命题;"掌握"数学归纳法的程序:"奠基"—"递推"—"结论";"认识"数学归纳法的价值:思维价值,应用

价值，人文价值和教育价值. 徐海虎[32]对数学归纳法案例的选择原则进行了研究，指出案例的选择要从对学生的“学”与教师的“教”两个方面来考虑，既要注意引起学生的认知冲突，激发求知欲望，又要富含趣味性和数学味，能够引导学生数学的看待和思考问题.

## 4　结论

数学归纳法提供了一种可以通过有限把握无限的思维工具，是人类理性智慧的光辉范例. 数学归纳法是培养学生数学核心素养的好素材[33]. 在中学的教学中不能因为高考不考而削弱对数学归纳法的教学要求，而应重视其思维价值、应用价值、文化价值、教育价值等. 鉴于数学归纳法蕴含丰富的数学思想、方法论价值、文化育人价值和思维训练价值，建议将高中(选修 2－2 第二章：推理与证明 2.3 节：数学归纳法)纳入必修内容. 其理由如下：第一，著名数学家华罗庚认为数学归纳法很重要，对学好高等数学和提高对数学的认识大有帮助. 第二，数学归纳法在整个数学中占据重要地位，是数学中重要的基本方法，很多数学问题的解决离不开数学归纳法. 特别是在高等数学中用数学归纳法证明关于某些涉及自然数的命题时具有不可代替性. 第三，我国应该借鉴和吸取国外的教学改革经验，重视对数学归纳法的教学. 如美国、日本等的要求比我国更高，2000 年美国要求学生会用数学归纳法证明一些特殊类型的题目[34]；王科和汪晓勤[35]对中国、美国、日本等国对数学归纳法的要求做了研究，教材内容安排和题目难度进行了比较分析，我国相对于美国、日本等国对数学归纳法的要求要低. 第四，数学归纳法的教学难点可以突破，运用一些教师的教学设计可以突破数学归纳法这个教学难点，如张松年[29]的教学实录；李雪梅和赵思林[36]基于 APOS 教学理论的教学设计；詹欣豪和何小亚[22]分析了教学困难并给出了教学对策. 这些教学设计都对突破数学归纳法法教学的难点具有启发性和实用性. 第五，数学归纳法具有较高的文化价值、思维价值和育人价值. 数学归纳法的文化价值体现在数学归纳法的发展历史之中，凝聚了一代代数学家的辛勤和智慧，数学家通过创新思维巧妙地解决了“无限”到“有限”的转化，为人类认识无限、把握无限提供的一个光辉的范例. 数学归纳法的思维价值体现在理解、应用数学归纳法需要直觉思维和逻辑思维的综合运用. 很显然，运用数学归纳法，一般既需要运算，又需要归纳，还需要逻辑推理，这有助于培养学生的数学运算和逻辑推理等核心素养.

基于对数学归纳法的历史文化性、重要性与突破教学难点的可行性的分析，可以认为，数学归纳法具有良好的文化育人价值，是学生感悟数学思想方法的重要学习资源，对学生进一步学习高等数学是非常必要的，虽然数学归纳法是高中数学教学的难点，但突破教学难点是可能的也是可行性. 由此得出结论：将数学归纳法纳入高中数学的必修课程是必要的、合理的，也是可行的. 因此，建议在下一次修订新课标时，将数学归纳法纳入必修课程的内容，但教材上的习题和高考试题都应控制题目难度，让更多学生对数学归纳法的学习有信心，为学生进一步学习高等数学打下良好基础.

**参考文献：**


[1] 平辛伦. 数学归纳法史述 [J]. 数学教学，1995(1)：34-36.

[2] 张映姜. 悠久的历史文化，精彩的数学归纳法 [J]. 数学教学研究，2011，30(12)：9-12.

[3] 冯进. 数学归纳法的发展历程 [J]. 常熟理工学院学报，2008，22(8)：19-26.

[4] 王科，汪晓勤. 代数推动下的数学归纳法演变 [J]. 数学通报，2014，53(8)：12-16.

[5] 孙宏安. 帕斯卡与数学归纳法 [J]. 数学通报，1997，36(9)：28-30.

[6] 张莉，贺贤孝. 数学归纳法的历史 [J]. 辽宁师范大学学报：自然科学版，1999，22(2)：102-106.

[7] 朱孝璋. 数学归纳法的构造 [J]. 数学通报，1991，30(2)：42-45.

[8] 胡大志，刘翠英. 数学归纳法的原理及推广 [J]. 山东纺织工学院学报，1994，9(1)：75-77.

[9] 张盛虞. 最小数原理与数学归纳法 [J]. 凯里学院学报，1998，15(S1)：36-38.

[10] 华罗庚. 数学归纳法 [M]. 上海：上海教育出版社，1964：16.

[11] 米山国藏. 数学精神、思想和方法 [M]. 成都：四川教育出版社，1986.

[12] 张雄，李得虎. 数学方法论与解题研究 [M]. 2 版. 北京，高等教育出版社，2013：3-7.

[13] 赵思林. 论数学全息定义与教学 [J]. 内江师范学院学报，2018，33(12)：19-23，54.

[14] 张禾瑞，郝鈵新. 高等代数 [M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2007：15-17.

[15] 李淑文，孙德菊. 累积数学归纳法 [J]. 数学通报，2001，40(5)：12-13.

[16] 郑学群. 反向数学归纳法 [J]. 中学数学，1995(6)：44-46.

[17] 刘世泽. 关于反向数学归纳法的两个问题 [J]. 数学通报,1987,26(8):24-26.
[18] 刘世泽. 数学归纳法的另外两种形式 [J]. 数学通报,1988,27(4):32-33.
[19] 李世杰. 数学归纳法应用功能的拓广 [J]. 上海中学数学,2004(5):40-41.
[20] 赵春祥. 变更命题法在数学归纳法中的应用 [J]. 教学月刊:中学版(教学参考),2013(5):59-61.
[21] 赵思林,王佩,徐小琴. 高中函数定义难学的原因 [J]. 内江师范学院学报,2017,32(6):23-28.
[22] 詹欣豪,何小亚. 数学归纳法教学的困难、对策与价值 [J]. 中学数学杂志,2014(9):6-9.
[23] 陈雪梅,王梅. 关注教学法表征的数学归纳法教学设计 [J]. 数学通报,2011,50(4):26-28,31.
[24] 王科,汪晓勤. 基于 HPM 视角和 DNR 系统的数学归纳法教学设计 [J]. 数学通报,2013,52(7):8-11.
[25] 胡群. 数学归纳法教学再探:从知识的产生过程中诠释递推思想 [J]. 中学数学教学参考,2007(9):21-22.
[26] 马茂年,俞昕. 课堂教学回归“数学化”的讨论和分析:以高中“数学归纳法”的教学为例 [J]. 数学教育学报,2013,22(3):80-85.
[27] 沈顺良. 基于学生认知的数学归纳法引入教学改进 [J]. 中国数学教育:高中版,2014(3):36-37,43.
[28] 李璜. “APOS”指导下的数学归纳法概念教学 [J]. 教学月刊:中学版,2014(5):43-45.
[29] 张松年. 概念教学应注重学生的表达:“数学归纳法”教学实录与反思 [J]. 中学数学月刊,2018(9):1-4.
[30] 潘伊人,濮安山. 核心素养视角下基于数学探究的“数学归纳法”教学设计与反思 [J]. 数学通讯:教师阅读,2018(10):19-21.
[31] 王跃辉,唐压西,莫定勇. 数学归纳法的探究性教学设计与教学建议 [J]. 中学数学研究,2017(12):10-13.
[32] 徐海虎. 由“为什么好”想到的:也谈数学归纳法新课引人案例的选择 [J]. 数学通报,2010,49(12):14-16.
[33] 赵思林,徐小琴. 数学素养研究述评 [J]. 内江师范学院学报,2018,33(6):33-39,45.
[34] NCTM. Principles and Standards for School Mathematics [S]. Reston: National Council of Teachers of Mathematics. 2000:345.
[35] 王科,汪晓勤. “中美日新”四国高中教材中的数学归纳法比较研究 [J]. 数学教育学报,2015,24(2):40-45.
[36] 李雪梅,赵思林. 基于 APOS 理论的教学设计:以数学归纳法的教学设计为例 [J]. 高中数学教与学,2017(11):1-4.

# The Cultural Aspect, Importance and Teaching Feasibility of Mathematical Induction

JI Dingchun, ZHAO Silin

(College of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang, Sichuan 641100, China)

**Abstract**: As a basic mathematical proving method, mathematical induction, is chiefly adopted to prove some mathematical proposition related to natural numbers. It's like a bridge that brings together with the specific and the general, and links the finite with the infinite. Through the analysis of the historical cultural aspect, importance and the feasibility of breaking through the teaching difficulties of mathematical induction, it is concluded that mathematical induction should be included in the compulsory content for the revision of the high school mathematics curriculum standard.

**Keywords**: Mathematical induction; cultural aspect; importance; feasibility

(责任编辑:王 佩)